Problema a III-a (10 puncte)

Vivariul

La o grădină zoologică, unele insecte, păsări şi animale mici sunt ținute în cutii paralelipipedice cu pereți de sticlă, numite vivarii.

Pereții vivariului pentru insecte sunt plăci transparente, cu fețe plan-paralele, având grosimea $e = 4{,}5\,cm$ şi indicele de refracție $n = 1{,}7\left(\cong \sqrt{3}\right)$. Indicele de refracție al aerului este $n_{aer} \cong 1$.

Sarcina de lucru nr. 1

Octavian împreună cu colegii vizitează grădina zoologică, însoțiți de un ghid. În cursul explicațiilor despre insectele din vivariu, ghidul utilizează un pointer laser, de la care trimite un fascicul de lumină către un perete al vivariului. Fascicul este asimilabil unei raze de lumină. El se propagă într-un plan perpendicular pe perete, după o direcție care face un unghi de $60°$ față de normala în punctul în care fasciculul pătrunde în peretele vivariului.

1.a. Determină valoarea distanței d dintre direcția de propagare a fasciculului de lumină incident pe peretele vivariului şi a celui emergent din acest perete.

Sarcina de lucru nr. 2

Atunci când se află în fața vivariului, Octavian observă, la incidență normală, imaginea unei insecte care stă în vivariu, pe o creangă.

2.a. Dedu expresia distanței D dintre poziția insectei şi poziția imaginii acesteia, prin peretele vivariului.

2.b. Calculează valoarea distanței D.

Insecta se deplasează pe o creangă subțire, liniară şi verticală.
2.c. Precizează dacă imaginea crengii, aşa cum este observată de Octavian, este sau nu o linie verticală. Justifică răspunsul.

Dacă îți sunt necesare, poți folosi următoarele relații:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x$$

$$tg\,x - tg\,y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

Sarcina de lucru nr. 3

La ieşirea din clădirea în care se află vivariul pentru insecte, Octavian observă o buburuză care stă pe un panou indicator. Octavian priveşte buburuza printr-o lupă, pe care o ține la distanța de $2{,}0\,cm$ față de ochi. Lupa are convergența de $10\,dioptrii$.

3.a. Determină valoarea distanței dintre buburuză şi ochiul lui Octavian, în situația în care imaginea buburuzei prin lupă se formează la distanța optimă de vedere $\delta_0 = 25\,cm$.

Vivariu - Soluție

Sarcina de lucru nr. 1

1.a. Fasciculul de lumină emergent din peretele vivariului se propagă după o direcție paralelă cu cea a fasciculului incident pe peretele vivariului (figura 1).
Legea refracției la suprafața de separare aer-sticlă (figura 1) are expresia

$$n_{aer} \cdot \sin i = n \cdot \sin r \quad (1)$$

Având în vedere că $n_{aer} \cong 1$, relația (1) devine

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} \quad (2)$$

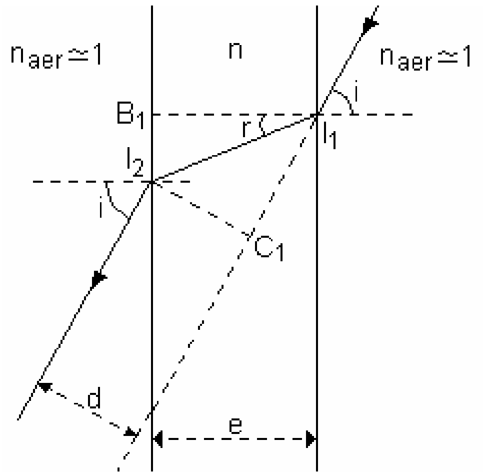

Figura 1

$$\begin{cases} \sin r = \dfrac{\sin 60°}{\sqrt{3}} \\ \sin r = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Prin urmare unghiul de refracție are valoarea

$$r = 30° \quad (4)$$

În $\Delta I_1B_1I_2$

$$\cos r = \frac{e}{I_1I_2} \quad (5)$$

de unde

$$I_1I_2 = \frac{e}{\cos r} \quad (6)$$

În $\Delta I_1C_1I_2$

$$\sin(i - r) = \frac{d}{I_1I_2} \quad (7)$$

Combinând relațiile (6) si (7) se obține

$$d = e \cdot \frac{\sin(i - r)}{\cos r} \quad (8)$$

Valoarea distanței d dintre direcția de propagare a fasciculului de lumină incident pe peretele vivariului şi a celui emergent este

$$\begin{cases} d = 4{,}5\,cm \cdot \dfrac{\sin(60^\circ - 30^\circ)}{\cos 30^\circ} \\ d = 2{,}6\,cm \end{cases} \quad (9)$$

Relația (9) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.a.

Sarcina de lucru nr. 2

2.a. În cele ce urmează este prezentată una dintre modalitățile de rezolvare a sarcinii de lucru 2.a.

În figura 2 este schițată construcția imaginii O_1 a unei insectei O din vivariu, prin suprafața de separare Σ_1 dintre peretele şi respectiv aerul din vivariu. Schița nu este realizată la scară.

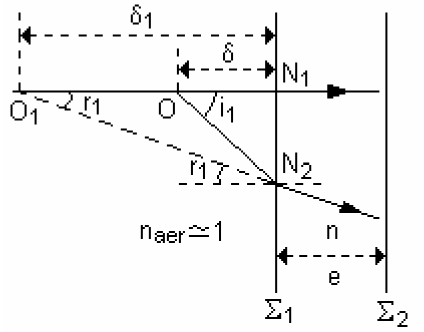

Figura 2

În ΔON_1N_2

$$tg\, i_1 = \frac{N_1N_2}{ON_1} \qquad (10)$$

iar în $\Delta O_1N_1N_2$

$$tg\, r_1 = \frac{N_1N_2}{O_1N_1} \qquad (11)$$

Din relațiile (10) şi (11) rezultă

$$\frac{tg\, i_1}{tg\, r_1} = \frac{O_1N_1}{ON_1} \qquad (12)$$

Ținând cont de notațiile din figura 2

$$\begin{cases} ON_1 = \delta \\ O_1N_1 = \delta_1 \end{cases} \qquad (13)$$

relația (12) devine

$$\frac{tg\, i_1}{tg\, r_1} = \frac{\delta_1}{\delta} \qquad (14)$$

Întrucât Octavian observă, la incidență normală, imaginea insectei care stă în vivariu, unghiurile i_1, respectiv r_1 sunt foarte mici şi se poate utiliza aproximația

$$\begin{cases} tg\, i_1 \cong \sin i_1 \\ tg\, r_1 \cong \sin r_1 \end{cases} \qquad (15)$$

Legea refracției, aplicată la suprafața de separare Σ_1, are expresia

$$\sin i_1 = n \cdot \sin r_1 \qquad (16)$$

Combinând relațiile (14), (15) şi (16) se obține

$$\delta_1 = n \cdot \delta \qquad (17)$$

Imaginea intermediară O_1 (figura 2) este situată la distanța

$$\begin{cases} \delta_1' = \delta_1 + e \\ \delta_1' = n \cdot \delta + e \end{cases} \qquad (18)$$

față de suprafața de separare Σ_2.

În figura 3 este schițată construcția imaginii finale O_2 a insectei din vivariu, prin cea de-a doua suprafață de separare Σ_2 dintre peretele vivariului şi aerul din exterior. Schița nu este realizată la scară.

În $\Delta O_1N_3N_4$

$$tg\, i_2 = \frac{N_3N_4}{O_1N_3} \qquad (19)$$

iar în $\Delta O_2N_3N_4$

$$tg\, r_2 = \frac{N_3N_4}{O_2N_3} \qquad (20)$$

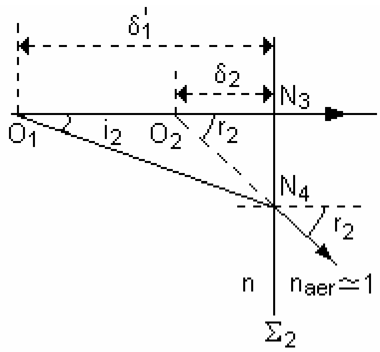

Figura 3

Din relațiile (19) şi (20) rezultă

$$\frac{tg\, i_2}{tg\, r_2} = \frac{O_2N_3}{O_1N_3} \qquad (21)$$

Având în vedere notațiile din figura 3

$$\begin{cases} O_1N_3 = \delta_1^{'} \\ O_2N_3 = \delta_2 \end{cases} \qquad (22)$$

relația (21) devine

$$\frac{tg\, i_2}{tg\, r_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1^{'}} \qquad (23)$$

Întrucât Octavian observă, la incidență normală, imaginea insectei care stă în vivariu se poate utiliza aproximația unghiurilor mici

$$\begin{cases} tg\, i_2 \cong \sin i_2 \\ tg\, r_2 \cong \sin r_2 \end{cases} \qquad (24)$$

Legea refracției, aplicată la suprafața de separare Σ_2, are expresia

$$n \cdot \sin i_2 = \sin r_2 \qquad (25)$$

Din relațiile (18), (23), (24) şi (25) rezultă

$$\begin{cases} \delta_2 = \dfrac{\delta_1^{'}}{n} \\ \delta_2 = \dfrac{n \cdot \delta + e}{n} \\ \delta_2 = \delta + \dfrac{e}{n} \end{cases} \qquad (26)$$

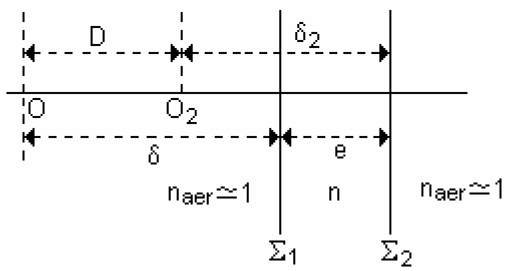

Figura 4

Conform figurii 4, distanța dintre poziția insectei notată cu O şi poziția imaginii sale finale O_2 are expresia

$D = (\delta + e) - \delta_2$ (27)

Din relațiile (26) şi (27) se obține

$$\begin{cases} D = (\delta + e) - \left(\delta + \dfrac{e}{n}\right) \\ D = e \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \end{cases} \qquad (28)$$

Relația (28) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.a.

2.b. Utilizând relația (28) şi efectuând calculul numeric se obține valoarea distanței D dintre poziția insectei şi poziția imaginii acesteia formată de peretele vivariului

$D = 1{,}9\ cm$ (29)

Relația (29) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.b.

2.c. În cele ce urmează este prezentată una dintre modalitățile de justificare a răspunsului pentru această sarcina de lucru.

Coordonatele x_i ale diferitelor puncte de pe creanga foarte subțire, liniară, verticală au aceeaşi valoare $(x_i = x)$, în raport cu un sistem de axe. Îi ipoteza în care imaginea crengii ar fi o linie dreaptă verticală, coordonatele x_i' ale diferitelor puncte ale imaginii ar trebui să aibă toate o anumită valoare $(x_i' = const)$, în raport cu sistemul de axe.

În figura 5 este schițată construcția imaginii $O'(x', y')$ a unui punct obiect $O(x, 0)$ în raport cu sistemul de axe xSy . Schița nu este realizată la scară.

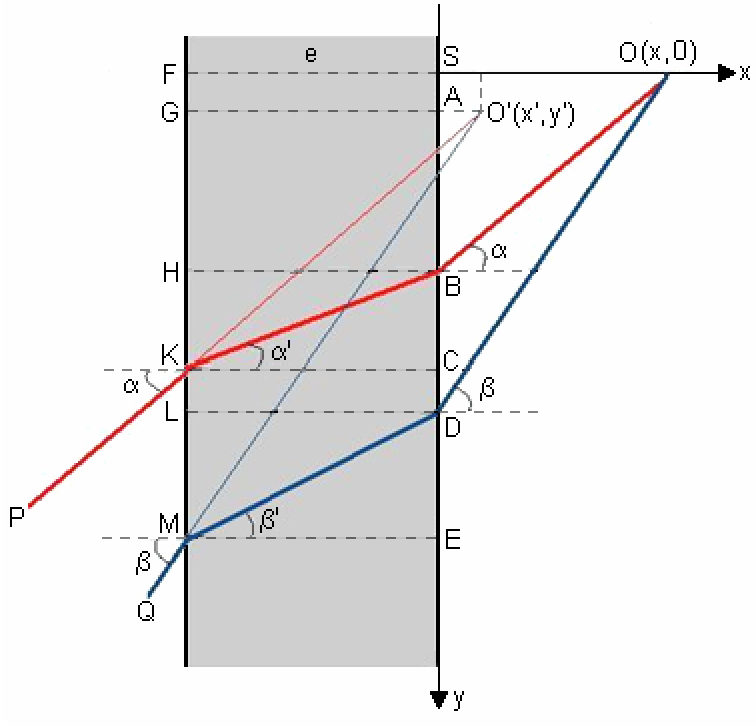

Figura 5

Cele două raze de lumină KP şi MQ care ajung la ochiul observatorului sunt foarte apropiate

$$\begin{cases} \beta = \alpha + \Delta\alpha \\ \beta' = \alpha' + \Delta\alpha' \end{cases} \qquad (30)$$

unde $\Delta\alpha$ şi $\Delta\alpha'$ sunt unghiuri foarte mici

Una dintre modalitățile de a stabili dacă imaginea crengii este sau nu o linie dreaptă verticală, constă în a deduce expresia coordonatei x' a imaginii $O'(x', y')$ a unui punct obiect $O(x, 0)$ în raport cu un sistem de axe xSy şi de a evalua dacă această coordonată variază, sau nu, în funcție de unghiul α de incidență.

În ΔKBC

$$BC = e \cdot tg\alpha' \tag{31}$$

iar în ΔMED

$$DE = e \cdot tg\beta' \tag{32}$$

În ΔOSB, măsura unghiului SOB este egală cu α. Prin urmare

$$SB = x \cdot tg\alpha \tag{33}$$

În ΔOSD, măsura unghiului SOD este egală cu β. Prin urmare

$$SD = x \cdot tg\beta \tag{34}$$

$$\begin{cases} CD = SD - SC \\ CD = SD - (SB + BC) \end{cases} \tag{35}$$

Substituind relațiile (31), (33) şi (34) în relația (35) se obține

$$CD = x \cdot (tg\beta - tg\alpha) - e \cdot tg\alpha' \tag{36}$$

Conform figurii 5

$$KM = CE \tag{37}$$

$$KM = CD + DE \tag{38}$$

Substituind relațiile (32) şi (36) în relația (38) se obține

$$KM = x \cdot (tg\beta - tg\alpha) + e \cdot (tg\beta' - tg\alpha') \tag{39}$$

În $\Delta O'GK$, măsura unghiului $GO'K$ este egală cu α. Prin urmare

$$GK = (x' + e) \cdot tg\alpha \tag{40}$$

În $\Delta O'GM$, măsura unghiului $GO'M$ este egală cu β. Prin urmare

$$GM = (x' + e) \cdot tg\beta \tag{41}$$

$$KM = GM - GK \tag{42}$$

$$KM = (x' + e) \cdot (tg\beta - tg\alpha) \tag{43}$$

Din relațiile (39) şi (43) rezultă

$$x + e \cdot \frac{(tg\beta' - tg\alpha')}{(tg\beta - tg\alpha)} = e + x' \tag{44}$$

Întrucât unghiurile $\Delta\alpha$ şi $\Delta\alpha'$ sunt unghiuri foarte mici se pot utiliza următoarele aproximații

$$\begin{cases} \sin\Delta\alpha \cong \Delta\alpha \\ \sin\Delta\alpha' \cong \Delta\alpha' \\ \cos\Delta\alpha \cong 1 \\ \cos\Delta\alpha' \cong 1 \end{cases} \tag{45}$$

În condițiile specificate prin relația (45), legea refracției

$$\sin\beta = n \cdot \sin\beta' \tag{46}$$

se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} sin(\alpha + \Delta\alpha) = n \cdot sin(\alpha' + \Delta\alpha') \\ sin\,\alpha \cdot cos\,\Delta\alpha + sin\,\Delta\alpha \cdot cos\,\alpha = n \cdot [sin\,\alpha' \cdot cos\,\Delta\alpha' + sin\,\Delta\alpha' \cdot cos\,\alpha'] \\ sin\,\alpha + \Delta\alpha \cdot cos\,\alpha \cong n \cdot [sin\,\alpha' + \Delta\alpha' \cdot cos\,\alpha'] \\ [sin\,\alpha - n \cdot sin\,\alpha'] + \Delta\alpha \cdot cos\,\alpha \cong n \cdot \Delta\alpha' \cdot cos\,\alpha' \\ \Delta\alpha \cdot cos\,\alpha \cong n \cdot \Delta\alpha' \cdot cos\,\alpha' \end{cases} \tag{47}$$

sau sub forma

$$\frac{\Delta\alpha'}{\Delta\alpha} \cong \frac{1}{n} \cdot \frac{cos\,\alpha}{cos\,\alpha'} \tag{48}$$

Având în vedere că

$$tg\,x - tg\,y = \frac{sin\,(x - y)}{cos\,x \cdot cos\,y} \tag{49}$$

şi utilizând condițiile specificate prin relația (45) rezultă

$$\begin{cases} tg\beta - tg\alpha \cong \dfrac{sin\,\Delta\alpha}{cos\,\alpha \cdot cos(\alpha+\Delta\alpha)} \\ tg\beta - tg\alpha \cong \dfrac{\Delta\alpha}{cos^2\alpha} \end{cases} \tag{50}$$

respectiv

$$tg\beta' - tg\alpha' \cong \frac{\Delta\alpha'}{\cos^2\alpha'} \tag{51}$$

Din relațiile (44), (50) şi (51) se obține următoarea expresie

$$x + e \cdot \frac{\Delta\alpha'}{cos^2\alpha'} \cdot \frac{cos^2\alpha}{\Delta\alpha} \cong e + x' \tag{52}$$

Substituind expresia din relația (48) în relația (52) rezultă

$$\begin{cases} x + e \cdot \dfrac{cos^3\alpha}{cos^3\alpha'} \cdot \dfrac{1}{n} \cong e + x' \\ x' \cong x - e \cdot \left[1 - \dfrac{1}{n}\dfrac{cos^3\alpha}{\left(\sqrt{1 - sin^2\alpha/n^2}\right)^3}\right] \end{cases} \tag{53}$$

Din relația (53) se constată că expresia coordonatei x' a imaginii $O'(x', y')$ a unui punct obiect $O(x,0)$ în raport cu un sistemul de axe xSy depinde de unghiul de incidență α. Întrucât diferitele puncte din imaginea crengii au coordonate $x'(\alpha)$ diferite, imaginea crenguței observată de către Octavian nu este o linie dreaptă verticală.

Relația (53), împreună cu comentariul din paragraful anterior reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.c.

Sarcina de lucru nr. 3

3.a. Prima formulă fundamentală a lentilelor subțiri

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = C \tag{54}$$

permite determinarea poziției buburuzei față de lupa folosită de Octavian

$$x_1 = \frac{x_2}{1 - C \cdot x_2} \tag{55}$$

Conform enunțului problemei şi notațiilor din figura 6

$$x_2 = -(\delta_0 - d_0) \tag{56}$$

$$x_2 = -23\,cm \tag{57}$$

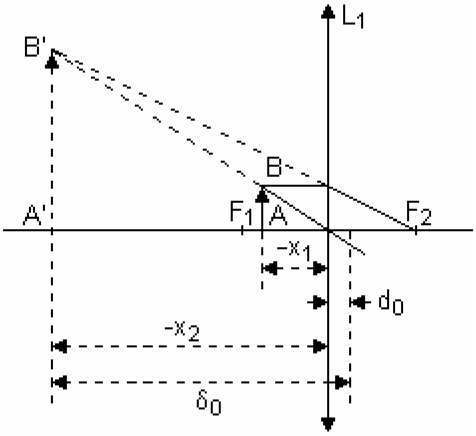

Figura 6

Înlocuind valorile numerice în relația (55) se obține

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{23}{3,3}\,cm \\ x_1 = -7,0\,cm \end{cases} \tag{58}$$

Distanța dintre buburuză şi ochiul lui Octavian are expresia

$$D_0 = |x_1| + d_0 \tag{59}$$

şi valoarea numerică

$$D_0 = 9,0\,cm \tag{60}$$

Relația (60) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.a.

© Soluție propusă de:

Dr. Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare şi Examinare – M E C T S

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti